

Gianni Ricci e Vanessa Debbia

Una soluzione evolutiva in un gioco differenziale di lotta di classe

1. Introduzione

Il modello matematico creato da R. Goodwin nel 1967 mostra come le contraddizioni interne dell'economia capitalista la vedano destinata a sottostare ad un alternarsi di periodi di crescita relativamente elevata con periodi di indesiderata recessione. Il modello, di formulazione non lineare che descrive l'evoluzione di due variabili fondamentali quali l'*occupazione* e le *quote distributive*, presenta infatti caratteri di instabilità dovuti all'andamento fluttuante delle variabili stesse e alla loro incapacità di stabilizzarsi su valori economicamente accettabili. Alla base di tale comportamento economico vi è un rapporto di tipo "preda-predatore" tra i lavoratori e i capitalisti che conduce il sistema ad orbitare attorno ad un valore medio di equilibrio, che risulta però irraggiungibile.

Rivalutato negli anni '80 per la sua attinenza con la storia dell'economia reale, il modello di Goodwin è divenuto la pietra miliare di una serie di lavori successivi ad opera di altri economisti che ritengono, in accordo con l'autore, che i modelli lineari, sebbene attraenti per la loro semplicità, presentino limiti tali da renderli inadatti a descrivere in modo attendibile i processi economici. Al contrario la natura di modello intrinsecamente instabile, ha reso il lavoro di Goodwin particolarmente attraente per tutti coloro che successivamente si sono adoperati per verificare fino a che punto fosse possibile generalizzare il modello di crescita, senza rinunciare alla peculiarità strutturale di ammettere orbite chiuse.

Goodwin stesso in [12] propone una generalizzazione del suo modello lasciando implicita la funzione che definisce la curva di Phillips. Velupillai [18] e Flaschel [9] studiano quest'ultimo sistema da un punto di vista qualitativo adottando l'ipotesi che esso ammetta un solo punto critico nel primo quadrante.

Maresi e Ricci [14] prendendo in considerazione critiche effettuate alle ipotesi di Goodwin, mostrano come il modello mantenga le medesime caratteristiche qualitative anche nel caso di rilassamento di alcune delle ipotesi. In un successivo lavoro [15] con la modifica dell'ipotesi riguardante la dinamica della crescita della forza lavoro e l'introduzione di una "propensione all'investimento" da parte dei capitalisti (nel modello originale di Goodwin tutto il prodotto è reinvestito), gli stessi autori costruiscono un modello basato su un sistema non conservativo che dà origine a due punti singolari, uno stabile ed uno instabile.

Balducci e Candela [2] e Desai [8] hanno riformulato il concetto di crescita ciclica di Goodwin in un modello econometrico e ne hanno empiricamente valutato la validità applicandolo rispettivamente al caso italiano per il periodo che va dal 1954 alla metà degli anni '70, e alla situazione del Regno Unito per il periodo 1855-1965.

Con l'introduzione del modello in un contesto di teoria dei giochi Balducci, Candela e Ricci (1983) si pongono in una posizione originale rispetto ai lavori menzionati in quanto, attraverso l'inserimento nel modello di variabili di controllo, cercano di trovare un modo razionale per eliminare quel ciclo, considerato rovinoso per l'economia, e che gran parte di coloro che hanno lavorato sul modello di Goodwin hanno ritenuto inevitabile in quanto caratterizzante del modello stesso. Gli autori riformulano il modello originale modificando in parte le ipotesi fissate da Goodwin (lasciando comunque inalterate le caratteristiche qualitative del modello), dopodiché trasformano due variabili esogene in variabili di controllo per altrettante unità decisionali. Si viene così a configurare un gioco dinamico non cooperativo e simmetrico in cui i giocatori (lavoratori e capitalisti) ricercano l'eliminazione delle fluttuazioni delle variabili economiche, mantenendo l'obiettivo di posizionare l'economia in una situazione a loro favorevole. La *soluzione stazionaria estrema* (*extremal steady state*) per il gioco differenziale trovata dagli autori evidenzia un

comportamento analogo a quello del modello originale di Goodwin, mostrando come la ciclicità della crescita non sia dovuta ad un comportamento irrazionale degli agenti economici, ma piuttosto ad elementi conflittuali insiti nel capitalismo.

L'obiettivo di questo lavoro è di continuare l'approccio di Balducci Candela e Ricci e fornire un tipo diverso di soluzione per il gioco dinamico costruito dagli autori.

2. Il gioco differenziale non cooperativo di Balducci Candela e Ricci.

L'introduzione del modello di Goodwin in un contesto di teoria dei giochi ha portato alla formulazione di un gioco differenziale non cooperativo in quanto i giocatori, pur trovandosi d'accordo sulla necessità di eliminare il ciclo, sono in disaccordo sul punto in cui desiderano che il sistema si stabilizzi. Entrambi infatti tendono a minimizzare la distanza tra le coordinate del punto stazionario e quelle del loro punto di equilibrio ideale.

Il gioco assume le seguenti caratteristiche:

- Insieme dei giocatori $N = \{1, 2\}$
- Variabili strategiche (controlli) : u_i ($i=1, 2$)
- Struttura informativa dei giocatori: informazione \mathcal{S} -algebra di tipo *open loop*.
- Funzioni di costo:

$$(1.1) J^i = 1/2 \int_0^T [x_1(u_1^i - u_1)^2 + x_2(u_2^i - u_2)^2] dt + F^i(x(T)); \quad i = 1,$$

2

dove

u_j^i = valore desiderato dall'i-esimo giocatore per il controllo u_j

- Dinamica del sistema:

$$(1.2) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{1}{k} u_2 x_2 + (m + n) \\ \dot{x}_2 = u_1 x_1 - (S_0 - m) \end{cases}$$

dove

$$x_1 = -\ln u$$

$$x_2 = -\ln v$$

u = saggio di occupazione

v = quota di reddito nazionale destinata ai lavoratori

m = saggio di crescita della produttività del lavoro

n = saggio di crescita della forza lavoro

k = rapporto capitale/prodotto

u_2 = quota di profitti reinvestiti (controllo dei capitalisti)

u_1 = intensità delle rivendicazioni salariali (controllo dei lavoratori)

S_0 = incremento del saggio di salario ideale per i lavoratori.

S = elasticità del saggio di crescita dei salari all'occupazione, ovvero intensità delle richieste di aumenti salariali.

La soluzione di Nash per il gioco differenziale non conduce ad una eliminazione delle fluttuazioni, ma provoca un andamento multiciclico delle variabili macroeconomiche attorno al punto critico G che assume le coordinate:

$$G \equiv \left(\frac{S_0 - m}{u_1^1} ; \frac{k(m+n)}{u_2^2} \right)$$

Le coordinate del punto di equilibrio sono ora individuate, una per parte, dai giocatori, ma l'economia non è ancora in grado di raggiungere una soluzione stazionaria.

3. La soluzione "evolutiva".

In questo lavoro sarà considerata una soluzione che definiamo “evolutiva”, ossia una soluzione che tiene conto del fatto che a seconda del livello di occupazione e delle quote distributive il peso dei due giocatori risulta differente per cui il gioco non è sempre simmetrico, ma risulta asimmetrico quando il potere è sbilanciato a favore di uno dei due. Quando livello di occupazione e salari sono elevati avremo un gioco di tipo Stackelberg dove i lavoratori saranno considerati il leader; nel caso contrario essendo il potere dei capitalisti più elevato saranno questi ad assumere il ruolo di leader mentre ai lavoratori sarà riservato il ruolo di follower. Quando il valore delle variabili macroeconomiche è tale da bilanciare i poteri verrà nuovamente preso in considerazione il gioco simmetrico di tipo Nash.

L'identificazione di questo gioco come “evolutivo” nasce dalla analogia con una tipologia di giochi, detti appunto *evolutivi*, che traggono origine da applicazioni in campo biologico. L'idea di base è che i comportamenti degli individui (o delle popolazioni) si modificano in base ai mutamenti intervenuti nell'ambiente circostante, lasciando posto a strategie più adatte al nuovo contesto¹. Le applicazioni in campo economico sono relativamente recenti e possono essere ritrovate ad

¹ Il concetto di stabilità cui si fa riferimento in biologia per tali giochi è quello di Evolutionary Stable Strategy (ESS) che definisce una situazione di equilibrio per cui se in una popolazione intervengono individui che adottano un comportamento “deviante”, questi non sono in grado di intaccare l'equilibrio, ma sono destinati ad estinguersi per effetto della selezione naturale. Vedi D. Friedman [10].

esempio nei lavori di Crawford (1990), Cressman (1992), Balkenborg e Schlag (1994) van Damme (1994), Banerjee e Weibull (1995) e altri.

Suddividendo il piano delle fasi (u, v) in 4 quadranti aventi come origine il punto critico, definiamo diversi tipi di gioco a seconda dei livelli di occupazione e salari (figura 1).

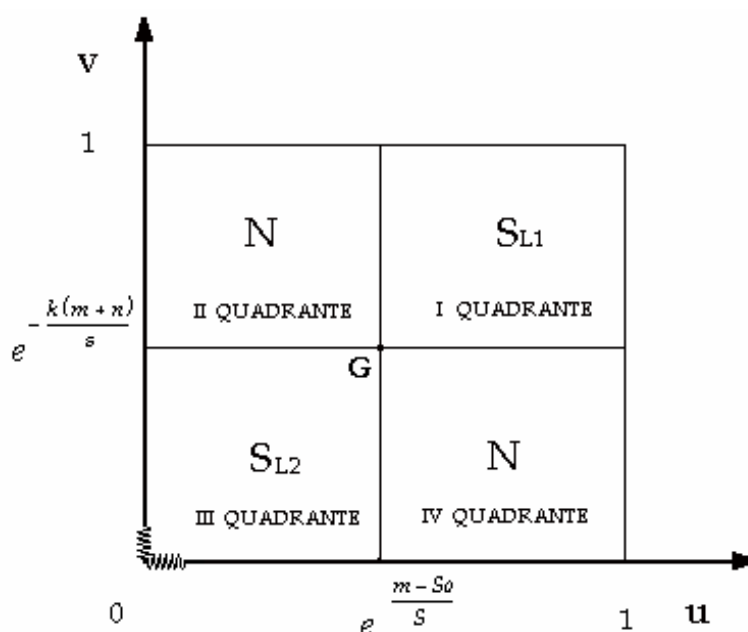


Figura 1

Nel I quadrante, indicato con S_{L1} , sia il livello di occupazione che la quota distributiva dei lavoratori (giocatore 1) sono elevati ed è quindi plausibile ipotizzare che questi ultimi agiscano in posizione di leader essendo il loro potere contrattuale notevole. Il gioco che si verrà a configurare sarà di tipo Stackelberg con leader i lavoratori. Al contrario nel III quadrante, indicato con S_{L2} , il basso livello di occupazione e i profitti elevati attribuiscono ai capitalisti (giocatore 2) la qualità di

leader. Anche qui avremo un gioco di tipo Stackelberg con leader però questa volta i capitalisti.

Nel II e nel IV quadrante i poteri risultano bilanciati per cui il gioco sarà simmetrico e richiederà una soluzione di tipo Nash.

Partendo da un generico punto (u_0, v_0) nel piano, quando per effetto delle scelte operate dai giocatori il sistema termina in una delle linee di confine che delimitano i diversi “mode of play”, il gioco finisce e ne inizia un altro con condizione iniziale coincidente con quella finale del gioco precedente.

Se il sistema si muove in senso antiorario i punti di coordinate

$$\left(e^{\frac{m-S_0}{S}}, v \right)$$

costituiscono la condizione finale del gioco Stackelberg e contemporaneamente divengono condizione iniziale del gioco Nash successivo. In modo analogo i punti di coordinate

$$\left(u, e^{-\frac{k(m+n)}{s}} \right)$$

costituiscono una condizione finale per il gioco Nash e la condizione iniziale per il gioco Stackelberg in cui diventano leader i lavoratori se $u > \exp[(m - S_0) / S]$, viceversa sono leader i capitalisti se $u < \exp[(m - S_0) / S]$

Quadranti II e IV: gioco simmetrico.

Nei quadranti II e IV il sistema si muove secondo le leggi definite dal sistema (1.2) con i controlli ottimi dei giocatori ovvero²

² cfr [1]

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{1}{k}(u_2^2 + \frac{1}{k}p_1^2)x_2 + (m+n) \\ \dot{x}_2 = (u_1^1 - p_2^1)x_1 - (S_0 - m) \end{cases}$$

Quadrante III: gioco asimmetrico (leader giocatore 2).

L'assenza di termini incrociati nelle funzioni obiettivo definite dalla (1.1), fa sì che l'applicazione della soluzione gerarchica restituisca la medesima soluzione ottenuta nel caso di un gioco simmetrico analizzato da Balducci Candela e Ricci. Per trovare una soluzione autonoma bisogna quindi in parte modificare la funzione di costo dei giocatori inserendo in almeno una delle due funzioni obiettivo i termini incrociati. Risulta inoltre conveniente introdurre le seguenti ipotesi semplificatrici :

1. Il leader esprime le sue preferenze in termini di un unico obiettivo.
2. Valgono le seguenti disuguaglianze:

$$(1.3) \quad \begin{aligned} 0 < u_1^2 \leq u_1 \leq u_1^1 \leq 1 \\ 0 < u_2^2 \leq u_2 \leq u_2^1 \leq 1 \end{aligned}$$

La prima ipotesi consente di semplificare la funzione obiettivo del leader e di evitare soluzioni con una forma troppo complessa. La seconda permette di togliere i quadrati nelle distanze tra le coordinate del punto di equilibrio e i valori desiderati dai giocatori.

Se supponiamo che il giocatore 2 (i capitalisti) sia il leader il gioco differenziale che si viene a costituire adotta le seguenti funzioni obiettivo

$$(1.4) \quad J^1 = \int_0^T \left(-\ln \frac{u_1}{u_1^1} \right) (u_2^1 - u_2) x_1 dt + F^1(x(T))$$

$$(1.5) \quad J^2 = \frac{1}{2} \int_0^T (u_2 - u_2^2)^2 x_2 dt + F^2(x(T))$$

Nonostante sia cambiata la struttura delle funzioni obiettivo rispetto alla (1.1), l'idea di base per il criterio dei giocatori è sempre quello di minimizzare la distanza tra i valori effettivi assunti dalle variabili di controllo e i valori desiderati dai giocatori per le variabili stesse.

Le hamiltoniane diventano

$$H^1 = \left(-\ln \frac{u_1}{u_1^1} \right) \cdot (u_2^1 - u_2) x_1 + p_1^1 \left(-\frac{1}{k} u_2 x_2 + m + n \right) + p_2^1 (u_1 x_1 - S_0 + m)$$

$$H^2 = \frac{1}{2} (u_2 - u_2^2)^2 x_2 + p_1^2 \left(-\frac{1}{k} u_2 x_2 + m + n \right) + p_2^2 (u_1 x_1 - S_0 + m)$$

Per ogni strategia annunciata dal leader, la funzione di reazione del follower sarà data dalla minimizzazione della funzione H^1 per cui derivando parzialmente rispetto al controllo u_1 e ponendo la derivata uguale a zero otteniamo

$$\bar{u}_1 = \frac{(u_2^1 - u_2)}{p_2^1}$$

Notiamo che la reazione del follower dipende dallo scarto tra il suo valore desiderato per il controllo del leader (quota di profitti reinvestiti) e il valore che quest'ultimo effettivamente realizzerà

La derivata parziale seconda

$$\frac{\mathcal{H}^2 H^1}{\mathcal{H}(u_1)^2} = \frac{1}{u_1} (u_2^1 - u_2) x_1$$

risulta sempre positiva poichè prodotto di termini positivi. Per ipotesi infatti $0 \leq u_1 \leq 1$, $(u_2^1 - u_2) > 0$ per la (1.3) e x_1 deve essere positivo affinché il valore di u_1 si mantenga inferiore all'unità.

Per ottenere il controllo ottimo del leader inseriamo la risposta ottima del follower nella hamiltoniana del leader. Otteniamo

$$H_{|u_1}^2 = \frac{1}{2} x_2 (u_2 - u_2^2)^2 + p_1^2 \left(-\frac{1}{k} u_2 x_2 + m + n \right) + p_2^2 \left(\frac{(u_2^1 - u_2)}{p_2^1} x_1 - S_0 + m \right)$$

Ponendo poi uguale a zero la derivata parziale prima rispetto al controllo del giocatore

$$\frac{\partial H|_{\bar{u}_1}}{\partial u_2} = (u_2 - u_2^2) x_2 - \frac{p_1^2 x_2}{k} - \frac{p_2^2 x_1}{p_2^1} = 0$$

otteniamo l'espressione del controllo ottimo del secondo giocatore

$$u_2^* = u_2^2 + \frac{p_1^2}{k} + \frac{p_2^2}{p_2^1} \cdot \frac{x_1}{x_2}$$

La derivata parziale seconda

$$\frac{\partial^2 H|_{\bar{u}_1}}{\partial (u_2)^2} = x_2$$

risulta sempre positiva. Anche qui vale la pena di evidenziare come il controllo ottimo del leader (capitalisti) dipenda, oltre che dal valore desiderato, anche dal rapporto tra le variabili di stato, a sottolineare un adeguamento del controllo ai valori assunti dalle variabili macroeconomiche.

La funzione di reazione del follower, tenuto conto della strategia ottima del leader, diventa

$$u_1^* = \frac{u_2^1 - u_2^2}{p_2^1} - \frac{p_1^2}{kp_2^1} - \frac{p_2^2}{(p_2^1)^2} \cdot \frac{x_1}{x_2}$$

e definisce la *strategia ottima* del follower.

Il vettore (u_1^*, u_2^*) costituisce l'equilibrio Stackelberg per il gioco.

Vediamo infine la traiettoria ottima del sistema ottenuta inserendo nelle equazioni della dinamica i controlli ottimi dei giocatori. Il sistema (1.2) diventa

$$\begin{cases} x_1 = -\left(\frac{p_2^2}{kp_2^1}\right) x_1 - \left(\frac{u_2^2}{k} + \frac{p_1^2}{k^2}\right) x_2 + m + n \\ x_2 = \left(\frac{u_2^1 - u_2^2}{p_2^1} - \frac{p_1^2}{kp_2^1}\right) x_1 - \left(\frac{p_2^2}{(p_2^1)^2}\right) \cdot \frac{(x_1)^2}{x_2} - (S_0 - m) \end{cases}$$

Quadrante I: gioco asimmetrico (leader giocatore 1)

Ora vediamo il caso che si presenta nel I quadrante ossia una situazione in cui, per l'elevato livello di occupazione e salari, si può ritenere che i lavoratori siano il leader del gioco asimmetrico.

Mantenendo le ipotesi (1.3) e le funzioni obiettivo (1.4) e (1.5), troviamo ora la soluzione Stackelberg nel caso in cui il giocatore 1 sia il leader.

Ponendo

$$\frac{\partial H^2}{\partial u_2} = (u_2 - u_2^2)x_2 + \frac{p_1^2 x_2}{k} = 0$$

otteniamo la seguente funzione di reazione del follower

$$\bar{u}_2 = u_2^* = u_2^2 + \frac{p_1^2}{k}$$

Notiamo che per la struttura della funzione obiettivo del follower la sua reazione non dipende dalla strategia del leader (infatti non sono presenti i termini incrociati in J^2), per cui la funzione di reazione diventa anche controllo ottimo.

Il controllo ottimo del follower diventa

$$u_1^* = \frac{u_2^1 - u_2^2 - p_1^2 / k}{p_2^1}$$

La derivata parziale seconda

$$\frac{\partial^2 H^1}{\partial (u_1)^2} = \frac{1}{(u_1)} \left(u_2^1 - u_2^2 - \frac{p_1^2}{k} \right) x_1$$

è positiva se $(u_2^1 - u_2^2 - p_1^2 / k) > 0$, ovvero se il valore desiderato dai lavoratori per il controllo dei capitalisti (quota di profitti reinvestiti) u_2^1 è superiore al valore effettivamente realizzato da questi ultimi, infatti $(u_2^2 + p_1^2 / k)$ è l'espressione del controllo ottimo dei capitalisti. Essendo tale ipotesi plausibile, possiamo concludere che in u_1^* la funzione H^1 presenta un minimo.

Vediamo quindi la traiettoria del sistema ottenuta inserendo i controlli ottimi dei giocatori. Il sistema (1.2), nel caso in cui siano leader i lavoratori, diventa:

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = -\frac{1}{k} \left(u_2^2 + \frac{p_1^2}{k} \right) x_2 + m + n \\ \dot{x}_1 = \left(\frac{u_2^1 - u_2^2 - p_1^2 / k}{p_2^1} \right) x_1 - (S_0 - m) \end{cases}$$

4. Risultati e conclusioni

La dinamica delle variabili macroeconomiche, tenuto conto dei diversi giochi che si presentano nei 4 quadranti, è stata simulata numericamente.

I valori di riferimento per i parametri sono gli stessi utilizzati da Ricci in [16] ovvero:

$$u_1^1 = 0.72 \quad S_0 = 0.096$$

$$u_2^1 = 1 \quad m = 0.02$$

$$u_1^2 = 0.62 \quad n = 0.02$$

$$u_2^2 = 0.7 \quad k = 3$$

Vediamo riportati in figura 2 e 3 rispettivamente il *cammino temporale* delle variabili u e v e il rispettivo piano delle fasi.

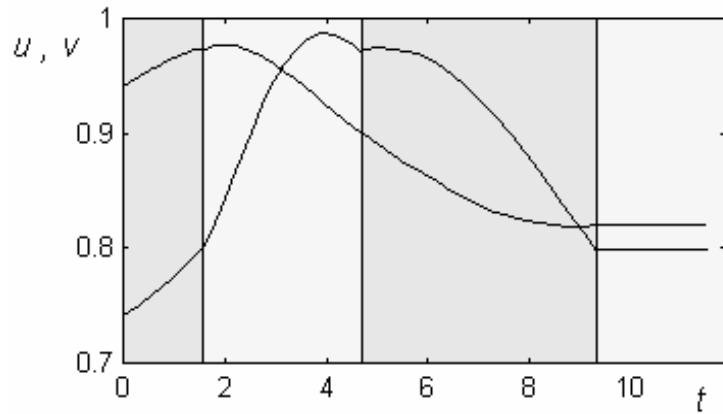


Figura 3. *Soluzione evolutiva: Cammino temporale delle variabili occupazione e quota dei salariati.*

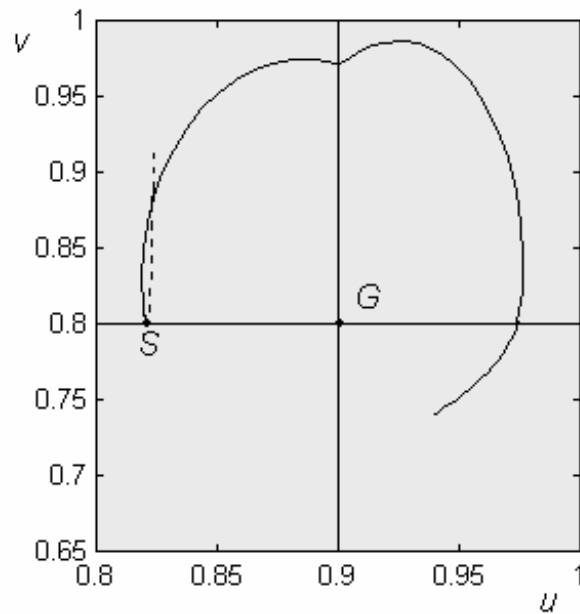


Figura 2. *Soluzione evolutiva: Piano delle fasi (u, v).*

La soluzione evolutiva conduce ad una eliminazione del ciclo e presenta un punto di stabilità, risultato dello scontro di due forze opposte sulla linea di confine tra un gioco simmetrico e uno asimmetrico dove i capitalisti agiscono da leader. Quando le variabili raggiungono il punto S il sistema si stabilizza perchè non riesce

a sconfinare nel III quadrante in quanto il nuovo rapporto tra i poteri dei giocatori lo sospinge indietro nel II dove, cambiando nuovamente il ruolo dei giocatori, il sistema è respinto nel III, e così via. Il cambiamento del peso relativo dei giocatori in sostanza funge da strumento di stabilizzazione per il sistema, che però rimane ancorato ad un livello di occupazione inferiore a quello del punto critico. In questo senso anche la soluzione evolutiva non porta a risultati particolarmente soddisfacenti dal punto di vista economico, ma fornisce comunque una alternativa alle fluttuazioni del modello di crescita ciclica.

Bibliografia

- [1] Balducci R., G. Candela and G. Ricci, A generalization of R. Goodwin model with rational behavior of economic agents, in R.M. Goodwin, M. Krüger, and A. Vercelli (eds.), *Nonlinear Models of fluctuating growth, Lecture notes in economic and matamatical systems*, Vol. 228, Springer-Verlag Berlin, 1984.
- [2] Balducci R.e G. Candela, A model of growth cycle with its applications to the Italian case, in *Economic Notes*, n. 3, (1982)..
- [3] Balkenborg D. and K. Schlag, On the interpretation of evolutionary stable sets in symmetric and asymmetric games, Mimeo, Bonn University Economics Department, 1994.
- [4] Banarjee A., and J. Weibull, Evolutionary selection and rational behavior. In A. Kirman and M. Salmon (eds.), *Learning and Rationality in Economics*, Oxford: Blackwell, pp.343-63, 1995.
- [5] Basar T. and G. J. Olsder, *Dinamic noncooperative game theory*, Academic Press, London 1983.
- [6] Crawford V. P., An “Evolutionary” explanation of Van Huyck, Battalio, and Beil’s experimental results on coordination, *Games and economic Bahavior*, 3, 25-59, 1990.
- [7] Cressman R., *The stability concept of Evolutionary Game Theory* , Berlin: Springer Verlag, 1992.
- [8] Desai M., An econometric model of the Share of Wages in national income: UK 1855-1965, in R.M. Goodwin, M. Krüger and A. Vercelli (eds.), *Nonlinear Models of fluctuating growth, Lecture notes in economic and matamatical systems*, Vol. 228, Springer-Verlag Berlin, 1984.
- [9] Flaschel P., Some stability properties of Goodwin Growth cycle. A critical elaboration., *Journal of Economics* 39, 1979, 245-257.
- [10] Friedman D., Evolutionary games in economics, *Econometrica*, vol. 59, No. 3, 637-666, May 1991.
- [11] Goodwin R., A Growth Cycle. In Feinstein C.H., *Socialism, Capitalism and Economic Growth*, Essays presented to Maurice Dobb, Cambridge University Press, Cambridge, 1967.
- [12] Goodwin R., Growth cycle, in E.K. Hunt e J.G. Schwartz (eds.), *A critique of economic theory*, Londra 1972.
- [13] Haurie A., Piecewise deterministic and piecewise diffusion differential games with modal uncertainties, in G. Ricci (eds.), *Decision Processes in Economics*, Springer-Verlag, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Vol 353, 1989.
- [14] Maresi E. e Ricci G., Modello di sviluppo di Goodwin: alcune modifiche e simulazioni, *Boll. Un. Mat. Ital.*, 5, 13-B, 1976, 651-571.
- [15] Maresi E. e Ricci G., Modello di sviluppo di Goodwin: ulteriori modifiche e simulazioni, *Boll. Un. Mat. Ital.*, 5, 15-A, 1978, 395-404.
- [16] Ricci G., Applications of Mathematics to the Goodwin Model, in G. Ricci K. Velupillai (eds.), *Growth Cycles and Multisectorial Economics: the Goodwin Tradition*, Springer-Verlag, *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, Vol 309, 1988.
- [17] Van Damme E., Evolutionary Game Theory, *European Economic Review*, 38: 847-58, 1994.
- [18] Velupillai K., Some stability properties of Goodwin’s growth cycle, *Journal of Economics*, 44, 1984, 63-69.
- [19] Von Neumann J. and O. Morgenstern, *Theory of games and economic behavior*, 2nd edn., Princeton University Press, Princeton, New Jersey 1947.

